数学规划求解器综述：理论、发展与最新进展

作者：writer 来源：科学网

本文原地址：https://www.iikx.com/news/progress/42992.html

本文仅供学习交流之用，版权归原作者所有，请勿用于商业用途！

数学规划求解器综述：理论、发展与最新进展
。数学规划求解器是一类依托数学规划算法求解现实世界问题的软件工具。近日，同济大学梁哲团队与合作者在中国工程院Engineering集群分刊ENGINEERING Management上发表题为An overview of mathematical programming solvers: Theory, development, and recent advances的综述文章。文章系统梳理了优化技术的演进历程，涵盖从单纯形算法、分支定界技术等传统方法，到由并行计算、GPU加速与人工智能算法推动的现代技术突破。

同时，本文重点讨论了近年由中国机构和企业开发的数学规划求解器的兴起。这些求解器已成为该领域的重要参与者，并在与成熟求解器的基准测试比较中取得了显著成绩。本文全面梳理了数学规划求解器的理论基础、历史发展与新兴趋势，为该领域的研究者与工程实践者提供了有价值的参考。

数学规划求解器是一类运用数学规划算法，解决公共机构与商业组织面临的大规模复杂问题的工程软件。这类技术已广泛应用于制造、交通、通信、金融、能源、供应链、人员排班、物流与零售运营等多个领域，能够显著提升有限资源在规划、分配与调度环节的决策效率。

先进的数学规划求解器主要解决实际应用中的两大核心问题：线性规划（LP）与混合整数线性规划（MILP）。但现实世界的问题往往超出这两类范畴，因此学界与产业界开发了多款能够处理更复杂非线性问题的求解器，包括二次规划（QP）、二阶锥规划（SOCP）、半定规划（SDP）以及非凸优化问题。进一步引入整数决策变量的扩展模型，如混合整数二次规划（MIQP）、混合整数二阶锥规划（MISOCP）、混合整数非线性规划（MINLP），也在学术研究与求解器开发中受到了越来越多的关注。数学规划求解器的构建依托于一系列成熟的数学规划理论与算法体系，包括单纯形法、内点法、对偶理论、分支定界法、一阶方法、有效集法以及各类启发式算法。近年来，随着并行计算、人工智能等新兴技术的兴起，数学规划求解器的发展正迎来新一轮变革。这些技术创新为提升求解器性能、解决日益复杂的优化问题创造了新的机遇。

数学规划求解器的研发面临着极高的技术挑战，不仅要求研发人员具备深厚的数学优化理论功底，还要求其具备强大的软件工程能力，尤其是数据结构、算法设计与底层实现能力。此外，求解器的研发过程周期长、资源投入大，且存在固有风险。从发展历程来看，这类求解器的早期技术突破与产品化主要由欧美的头部企业与科研机构主导，代表性的商用求解器包括CPLEX、Gurobi、Mosek、Knitro与Xpress。1992年由企业与学术机构联合构建的MIPLIB基准测试集（Bixby et al., 1992），以及CBLIB（Friberg, 2016）、QPLIB（Furini et al., 2019）等测试集，已被广泛用于对比优化求解器的性能，同时推动了该领域的学术研究。基于这些测试库，美国亚利桑那州立大学的汉斯?米特尔曼（Hans Mittelmann）教授搭建了一套持续维护的基准测试平台，可实现LP、MILP、S

DP、MIQP、MINLP等多类问题的求解器性能对比。尽管这些基准测试仅能代表现实世界优化问题的一小部分，但仍直观体现了过去几十年间求解器性能的爆发式提升。

近年来，总部位于中国的机构和企业研发的求解器已成为优化领域的重要贡献者，并推动全球优化技术取得了重要进展。代表性求解器包括：杉数科技2019年发布的COPT、阿里巴巴2020年发布的MindOpt、华为分别于2021年与2024年发布的OptVerse与TAYLOR、联想2022年发布的LeOPT。目前，其中多款求解器已在米特尔曼维护的LP单纯形、障碍法与MILP基准测试中跻身全球顶尖行列。尽管它们进入市场的时间相对较晚，但崛起速度极为迅猛。

目前，学界已出现多篇关于数学规划求解器的综述研究：部分研究专门聚焦CPLEX求解器，覆盖了20世纪90年代至21世纪初的发展历程（Achterberg and Wunderling, 2013; Bixby, 2002; Bixby et al., 2004）；另有研究重点关注LP/MILP求解器（Koch et al., 2022）；还有部分综述专门针对MINLP求解器展开（Bussieck and Vigerske, 2010）。但绝大多数已有综述并未覆盖近年新兴的求解器。

本综述旨在全面梳理数学规划求解器的相关研究，涵盖其理论基础、历史发展与最新技术突破，同时介绍并行化技术、图形处理器（GPU）加速、人工智能（AI）算法等新兴技术在求解器中的应用。

目前学界与产业界已开发出多款数学规划求解器，用于解决不同行业与不同机构面临的特定优化问题。每一类问题都对应着相关的数学理论，要求研发人员具备深厚的专业知识与多年的数值软件编程经验。这些复杂性导致求解器的研发成本高昂，行业准入门槛也极高。数学规划求解器的发展，不仅受到计算机硬件迭代的推动，也离不开优化理论的持续创新。

20世纪80年代前后，欧美国家的机构与企业率先开发出数学规划求解器，并在市场中占据了主导地位。但在过去五年间，中国自研求解器发展迅速，已开始挑战成熟求解器的长期垄断地位。这些新兴求解器已在公开基准测试中跻身全球领先行列，并获得行业关注。尽管MIPLIB等基准测试对推动行业进步起到了至关重要的作用，但它们仅能代表现实世界问题广泛多样性中的一小部分，还可能在无意中导致求解器策略向基准测试过度优化。终端用户必须优先在自身的特定问题算例上开展实证测试。

近年来，AI与GPU技术的发展，为进一步提升求解器性能提供了巨大潜力。AI技术可辅助分支、割平面选择、原始启发式等核心任务，而GPU硬件非常适合并行矩阵运算，能够优化数学规划求解器中的部分线性代数计算。但将这些技术创新与当前主流求解器架构的深度融合，仍面临诸多挑战，需要一定的时间落地。未来，这些创新有望推动数学规划求解器的整体设计发生更深层次的变化。（来源：EngineeringJournals微信公众号）

相关论文信息：https://journal.hep.com.cn/fem/EN/10.1007/s42524-026-5153-z

作者：梁哲 等 来源：《工程·管理》

更多 科学进展 请访问 https://www.iikx.com/news/progress/

本文版权归原作者所有，请勿用于商业用途，爱科学iikx.com转发